Universidad Simón Bolıvar.
Departamento de Matemáticas puras y aplicadas.
MA1111. Tercer Parcial. Sept-Dic 2009 (30 pts).

Nombre:__________________________Carnét:__________________________

1. Responda con verdadero o falso, cada una de las siguientes proposiciones, justificando su respuesta. Esto significa, que debe proporcionar una demostración si responde verdadero o un contraejemplo si responde falso. (2 pts, 1 pt cada item)

   a) Si $f'(a) = 0$, entonces f presenta un extremo relativo en $x = a$.

   b) Si f es contínua en $x = a$, entonces f es derivable en $x = a$.

2. Demuestre que las rectas tangentes a las curvas definidas por

$$y^2 - 4x^3 = 0 \quad \text{y} \quad 2x^2 + 3y^2 = 14$$

   son perpendiculares entre sí, en el punto $(1, 2)$. (3 pts)

3. Hallar, entre todos los triángulos isósceles de perímetro igual a 20, aquél (o aquellos) de área máxima.(6 pts)

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & \text{si } x \leq 1, \\ \frac{1}{|x|}, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   Hallar los valores de a y b, tales que $f'(1)$ existe. (4 pts)

5. Sea la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2},$$

   determine:

   a) Dominio (1 pt).

   b) Puntos de corte con los ejes coordenados (1 pt).

   c) Asíntotas (3 pts).

d) Puntos criticos (1 pt).

e) Intervalos de crecimiento y decrecimiento (2 pts).

f) Intervalos de concavidad y convexidad (2 pts).

g) Puntos de inflexión (1 pt).

h) Extremos locales (2 pt).

i) Dibuje su gráfica (2 pts). (Total: 15 pts).

Observación: Se evaluarán la redacción, el procedimento y los resultados. ¡Suerte!

Respuestas:

Respuesta 1:

a) Falso. Basta considerar $f(x) = x^3$ y $a = 0$. Observamos que $f'(x) = 3x^2$ y por lo tanto se anula si y sólo si $x = 0$, pero en $x = 0$, f no presenta ni máximo ni mínimo local.

b) Falso. Basta considerar $f(x) = |x|$ y $a = 0$. Observamos que f es continua en $x = 0$. Además

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y dado que f' no es contínua en $x = 0$, concluimos que f no es derivable en $x = 0$.

Respuesta 2:

Dos rectas $y = a_1x + b_1$ e $y = a_2x + b_2$ son perpendiculares, si y sólo si $a_1a_2 = -1$. Luego basta calcular las pendientes de las rectas tangentes a cada curva en el punto $(1, 2)$. Para ello, derivamos implícitamente la igualdad $y^2 - 4x^3 = 0$. Así

$$2y\frac{dy}{dx} - 12x^2 = 0,$$

lo que implica que $\frac{dy}{dx} = 6\frac{x^2}{y}$ y por lo tanto, $a_1 = \frac{dy}{dx}(1, 2) = 3$.
Por otra parte, al derivar la identidad $2x^2 + 3y^2 = 14$, obtenemos que

$$4x + 6y\frac{dy}{dx} = 0,$$

por lo que $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ y tenemos que en este caso, $a_2 = \frac{dy}{dx}(1, 2) = -\frac{1}{3}$.
En conclusión, $a_1a_2 = -1$.

Respuesta 3:

Denotaremos por

$$P = \{\text{perímetro del triángulo}\},$$

$$A = \{\text{área del triángulo}\},$$
$$x = \{\text{la base del triángulo}\},$$
$$y = \{\text{lado del triángulo}\}$$

y finalmente,

$$h = \{\text{altura del triángulo}\}.$$

Como el triángulo es isósceles, dos de sus lados son iguales y tenemos que $P = 2y + x$. Esto implica que $y = (20 - x)/2$.
Por otra parte, mediante el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

y dado que el área del triángulo viene dado por $A = xh/2$, todo lo anterior nos permite escribir

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{(20-x)^2}{4} - \frac{x^2}{4}},$$

lo que representa el área del triángulo en función de la base.
Simplificando, obtenemos que

$$A(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100 - 10x}.$$

Ahora derivando y desarrollando podemos escribir

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{100-10x} - \frac{10x}{2\sqrt{100-10x}}\right) \\ &= \frac{100-15x}{\sqrt{100-10x}}. \end{aligned}$$

Luego, $A'(x) = 0$ sii $x = 20/3$. Si calculamos la segunda derivada obtenemos que

$$A''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-15(100-10x)^{1/2} + 5(100-15x)(100-10x)^{-1/2}}{100-10x}\right)$$

y evaluando obtenemos que $A''(20/3) < 0$, por lo que concluimos que en $x = 20/3$, hay un máximo local. En conclusión, el triángulo tiene dimensiones iguales a $x = 20/3$ e $y = 20/3$.

Respuesta 4:

Necesariamente f debe ser continua en $x = 1$. Como $f(1) = a + b$ y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1,$$

podemos establecer que $a + b = 1$.
Por otra parte, f es derivable en $x = 1$ sii las derivadas laterales existen y son iguales. Dado que $f'_+(1) = -1$ y $f'_-(1) = 2a$, tenemos entonces que $2a = -1$. Despejando y sustituyendo para calcular b, concluimos que $a = -1/2$ y $b = 3/2$.

Respuesta 5:

Dominio de f:

$$\mathbb{R} - \{-1\}$$

Puntos de corte con los ejes:
Observamos que $f(x) = 0$ sii $x = 0$ y $f(0) = 0$, por lo que $(0, 0)$ es el único punto de corte con los ejes coordenados.
Asíntotas:
Gracias al criterio de los polinomios,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

por lo que concluimos que no hay asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

por lo que concluimos que $x = -1$ es asíntota vertical de f.
Nuevamente, aplicando el criterio de los polinomios

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 + x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = -2$$

y concluimos que $y = x - 2$ es asíntota oblícua de f.

Puntos criticos:
Aplicando las reglas de derivación y simplificando,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

Así los puntos criticos son $x = 0$ y $x = -3$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

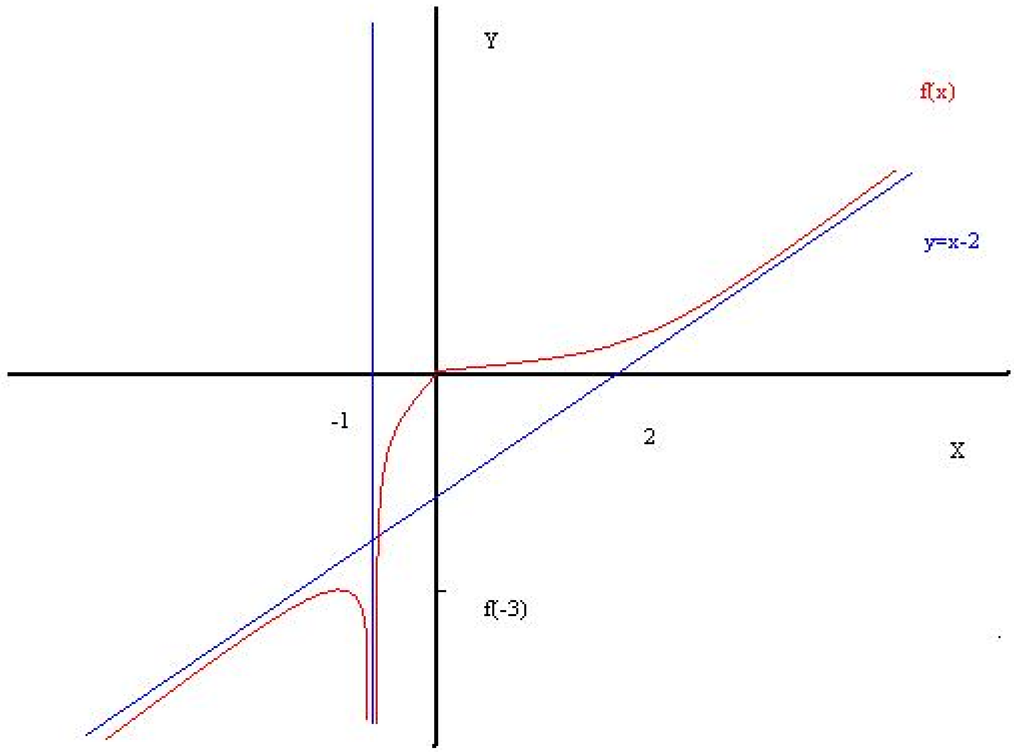
	$x \in (-\infty, -3)$	$x \in (-3, -1)$	$x \in (-1, 0)$	$x \in (0, \infty)$
x^2	+	+	+	+
$x+3$	-	+	+	+
$(x+1)^3$	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	+	+

por lo que tenemos que f crece si $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty) - \{0\}$ y f decrece si $x \in (-3, -1)$. Además, del criterio de la primera derivada concluimos que en $x = -3$ hay un máximo local. En $x = 0$ no hay nada.

Intervalos de concavidad y convexidad:
Calculamos la segunda derivada, obteniendo que

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - 3x^2(x+3)(x+1)^2}{(x+1)^6} &= \frac{3x(x+2)(x+1) - 3x^2(x+3)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

Así si $x > 0$, f es concava hacia arriba y si $x < 0$, f es concava hacia abajo.
En $x = 0$ hay un punto de inflexión.
Finalmente, la gráfica de f es la siguiente:


Y
f(x)
y=x-2
-1
2
X
f(-3)